ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ LUẬN

VỀ MỘT LỚP ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ LUẬN

VỀ MỘT LỚP ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ THỊ NGOAN

Thái Nguyên - 2020

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Thị Ngoan. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường; Khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K12B đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 7 năm 2020

Tác giả

Nguyễn Thị Luận

Mục lục

Lời mở đầu

Luận văn có mục đích tìm hiểu về hai bài toán cực trị về đa thức thuần nhất. Các bài toán này có các lời giải đơn giản cho đa thức một hoặc hai biến và trở nên phức tạp và thú vị với đa thức ba hoặc nhiều biến. Ta sẽ tìm hiểu về một họ các đa thức đối xứng thuần nhất ba biến như việc giải quyết những bài toán trên và trình bày các tính chất thú vị khác của họ đa thức này. Ví dụ: Các hệ số của chúng là các số nguyên có thể được biểu thị dưới dạng tổng của các hệ số nhị thức và sở hữu một tính chất chia hết. Hơn nữa, các đa thức này được kết nối đơn giản với một tập hợp các đa thức được sinh ra như những ví dụ sharp trong nghiên cứu về ánh xạ đa thức riêng giữa các hình cầu trong không gian Euclide phức.

Nhiều kết quả hay trong toán học minh họa cho nguyên lý heuristic rằng những đối tượng thỏa mãn một số điều kiện cực trị có các tính chất rất đặc biệt. Chúng ta có một vài minh họa cơ bản của nguyên lý này, chẳng hạn: Trong số tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình có diện tích lớn nhất là một hình vuông. Một ví dụ tương tự, rằng độ dài L của một đường cong kín trong mặt phẳng và diện tích A của miền phẳng giới hạn bởi L luôn thỏa mãn bất đẳng thức $4\pi A \leq L^2$. Đường cong cực trị mà đẳng thức đạt được đó là đường tròn.

Đối với bất kỳ đa thức p, hạng của p, ký hiệu là $R(p)$, là số đơn thức phân biệt xuất hiện trong p với hệ số khác không. Đề tài đặt ra mục đích tìm hiểu hai câu hỏi sau đây về đa thức thuần nhất:

Câu hỏi 1. *Trong tất cả các đa thức đối xứng thuần nhất p bậc m thoả mãn $p = sq$ với q là đầy đủ, hạng bé nhất có thể của p là gì? Các đa thức có hạng bé nhất này là các đa thức nào?*

Các đa thức như vậy là đa thức *đối xứng cực trị*. Câu hỏi 1 có liên quan đến câu hỏi sau:

Câu hỏi 2. *Trong số tất cả các đa thức thuần nhất p bậc m thoả mãn $p = sq$ với q là đầy đủ, hạng nhỏ nhất của p có thể là bao nhiêu? Các đa thức có hạng bé nhất này là các đa thức nào?*

Các đa thức như vậy là đa thức *sharp*.

Đối với đa thức một biến, những câu hỏi này không thú vị bởi vì mỗi đa thức khác không thuần nhất bậc m chỉ là một bội của x^m và do đó nó có hạng bằng 1. Đối với đa thức hai biến, câu trả lời cũng khá đơn giản. Nội dung chính luận văn đi sâu vào việc tìm hiểu câu trả lời cho các câu hỏi trên đối với đa thức thuần nhất ba biến.

Cấu trúc của luận văn gồm hai chương. Trong Chương 1 ta trình bày về đa thức đối xứng, đa thức đối xứng cực trị hai biến, đa thức đối xứng cực trị ba biến và sơ đồ Newton biểu diễn đa thức ba biến cho ta những hình dung trực quan về đa thức. Đây cũng là những kiến thức cần thiết phục vụ cho việc trình bày các nội dung tiếp theo của luận văn. Chương 2 được bắt đầu bằng việc giới thiệu về mối quan hệ giữa câu hỏi trên và lý thuyết hàm biến phức. Từ đó, hình thành họ đa thức hai biến duy nhất $f_m(x, y)$ với những tính chất thú vị. Từ đó, các họ $\{F_m(x, y, z)\}$, $\{S_m(x, y, z)\}$ được hình thành với mối quan hệ chặt chẽ, cho ta lời giải của hai câu hỏi trên trong trường hợp đặc biệt.

Chương 1

Đa thức đối xứng cực trị và sơ đồ Newton

1.1. Đa thức đối xứng

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, trên $\mathbb{N}^n$ ta định nghĩa một quan hệ thứ tự như sau: với hai phần tử tuỳ ý của $\mathbb{N}^n$ là $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ ta nói $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ khi và chỉ khi hoặc $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ hoặc $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}$, $a_i < b_i$. Quan hệ thứ tự như trên gọi là quan hệ thứ tự từ điển. Đây cũng là một quan hệ thứ tự toàn phần. Ta quy ước viết $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$ có nghĩa là $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ và $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n)$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho A là vành giao hoán có đơn vị và đa thức $f(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$, giả sử

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{a_{i1}} \ldots x_n^{a_{in}} \in A[x_1, \ldots, x_n],$$

với $c_i \in A$, $c_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{N}^n$ và mỗi khi $i \neq j$ ta có $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \neq (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$. Khi đó ta sắp tập các bộ số mũ $\{(a_{i1}, \ldots, a_{in}) | i = 1, \ldots, m\}$ theo quan hệ thứ tự từ điển theo chiều giảm dần. Theo thứ tự đó ta viết lại đa thức f, lúc này ta nói đa thức f được sắp theo lối từ điển, khi đó hạng tử ứng với bộ số mũ lớn nhất được gọi là hạng tử cao nhất của f.

Định nghĩa 1.1.2. Cho A là vành giao hoán có đơn vị và $f(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Ta nói f là một đa thức đối xứng của n ẩn nếu $f(x_1, \ldots, x_n) =$

$f(x_{\nu(1)}, \ldots, x_{\nu(n)})$ với mọi phép thế $\nu \in S_n$ (trong đó $f(x_{\nu(1)}, \ldots, x_{\nu(n)})$ có được từ $f(x_1, \ldots, x_n)$ bằng cách thay thế x_1 bởi $x_{\nu(1)}, \ldots$, thay thế x_n bởi $x_{\nu(n)}$).

Ta nhắc lại rằng, trong vành $A[x_1, \ldots, x_n]$, tập tất cả các đa thức đối xứng lập thành một vành con của vành đó. Các phần tử của A cũng là những đa thức đối xứng. Nếu $f(x_1, \ldots, x_n) \notin A$ là đa thức đối xứng thì $f(x_1, \ldots, x_n)$ phải chứa cả n ẩn và có cùng bậc đối với mỗi ẩn.

Định nghĩa 1.1.3. Trong vành đa thức $A[x_1, \ldots, x_n]$, xét các đa thức đối xứng sau đây gọi là các đa thức đối xứng cơ bản của n ẩn $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{1 \le i \le n} x_i \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \\
&\ldots \\
\sigma_k &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \\
&\ldots \\
\sigma_n &= x_1 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Các đa thức đối xứng cơ bản đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết biểu diễn đa thức đối xứng. Giả sử $g(x_1, \ldots, x_n)$ là đa thức đối xứng của $A[x_1, \ldots, x_n]$, khi đó đa thức nhận được từ $g(x_1, \ldots, x_n)$ bằng cách thay x_1 bởi σ_1..., thay x_n bởi σ_n được kí hiệu là $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ và gọi là đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản. Và đa thức $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ cũng là đa thức đối xứng.

Định lý 1.1.4. *Giả sử $f(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$ là đa thức đối xứng khác 0. Khi đó tồn tại duy nhất đa thức $h(x_1, \ldots, x_n) \in A[x_1, \ldots, x_n]$ sao cho $f(x_1, \ldots, x_n) = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

1.2. Đa thức đối xứng cực trị hai biến

Cho s là đa thức đối xứng cơ bản bậc nhất n biến. Chẳng hạn với $n = 2$, $s(x, y) = x + y$; khi $n = 3$ ta có $s(x, y, z) = x + y + z$. Cho k một số nguyên không âm, ta ký hiệu V_k là không gian vectơ các đa thức thuần nhất bậc k, n biến với hệ số phức, cùng với đa thức 0. Ta cần một số khái niệm.

Định nghĩa 1.2.1. Một đa thức thuần nhất $q \in V_k$ được gọi là *đầy đủ* nếu mọi đơn thức bậc k, n biến đều xuất hiện trong q với hệ số khác 0.

Chẳng hạn, với $n = 2$ thì $q_1(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ là đa thức bậc 3 đầy đủ, ngược lại $q_2(x, y) = x^3 + y^3$ là không đầy đủ.

Định nghĩa 1.2.2. Cho p là đa thức n biến, ta định nghĩa *hạng* của p, ký hiệu là $R(p)$, là số các đơn thức xuất hiện trong p với hệ số khác không.

Đối với trường hợp đa thức hai biến, các Câu hỏi 1 và Câu hỏi 2 ta đều có câu trả lời khá rõ ràng. Ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.2.3. *Cho $m \geq 1$, khi đó ta có*

$$p(x, y) = x^m + (-1)^{m-1}y^m,$$

là một đa thức sharp hai biến. Hơn nữa, nếu m lẻ thì p là đa thức đối xứng cực trị.

Chứng minh. Ta có nhận xét mọi đơn thức hai biến bậc m đều không có thương đầy đủ. Thật vậy, giả sử ta có đơn thức x^ay^b mà có thương $\dfrac{x^ay^b}{x+y} = q(x, y)$ là một đa thức đầy đủ. Khi đó

$$x^ay^b = (x + y)q(x, y)$$

Thay $y = 0$ vào đẳng thức trên, ta suy ra $0 = xq(x, 0)$. Do đó $q(x, 0) = 0$. Điều này la vô lý vì $q(x, y)$ là đa thức đầy đủ nên nó chứa đơn thức dạng x^r, và khi đó hiển nhiễn $q(x, 0) = cx^r \neq 0$ (với c nào đó).
Ta xét đa thức hai hạng tử $p(x, y) = x^m + (-1)^{m-1}y^m$. Ta có phân tích

$$p(x, y) = (x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \cdots + (-1)^{m-1}y^{m-1})$$

Ta đặt

$$q(x, y) = x^{m-1} - x^{m-2}y + \cdots + (-1)^{m-1}y^{m-1},$$

khi đó, rõ ràng q là đa thức thương đầy đủ của $p(x,y)$. Như vậy $p(x,y)$ là đa thức có hạng bé nhất thỏa mãn $p = sq$ với q là đầy đủ. Vậy p là một đa thức sharp hai biến.
Khi m lẻ ta có

$$p(x,y) = x^m + y^m$$

là đa thức đối xứng nên p là đa thức đối xứng cực trị hai biến. □

Chú ý 1.2.4. Khi $m = 2r$ là một số chẵn ta có

(i) Đa thức

$$p(x,y) = x^m + (-1)^{m-1}y^m$$

không là đa thức đối xứng. Ta có thể chứng minh được rằng không có đa thức đối xứng thuần nhất hai biến (với hệ số trên $\mathbb{C}$) bậc chẵn có hai hạng tử chia hết cho $x + y$. Thật vậy giả sử ngược lại, ta có đa thức $p(x,y) = cx^a y^b + cx^b y^a$ đối xứng thuần nhất hai biến bậc $a + b$ chẵn có hai hạng tử sao cho $p(x,y) = (x+y)q(x,y)$ với $q(x,y)$ là đa thức nào đó. Với $y = -x$, ta có $p(x,-x) = 0q(x,-x) = 0$. Mặt khác, vì $a + b$ chẵn nên a và b có cùng tính chẵn lẻ. Do vậy $(-1)^a = (-1)^b$. Ta suy ra

$$0 = p(x,-x) = cx^a(-x)^b + cx^b(-x)^a = 2(-1)^a cx^{a+b}.$$

Đây là một điều vô lý.

(ii) Đa thức

$$p(x,y) = x^{2r} + 2(-1)^{r-1}x^r y^r + y^{2r}$$

là đa thức đối xứng bậc $m = 2r$ có hạng bằng ba thỏa mãn

$$p(x,y) = (x+y)(x^r + (-1)^{r-1}y^r)\Big(\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j x^{r-1-j}y^j\Big),$$

trong đó

$$q(x,y) = (x^r + (-1)^{r-1}y^r)\Big(\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j x^{r-1-j}y^j\Big),$$

là đầy đủ nên p là đa thức đối xứng cực trị hai biến bậc chẵn và có hạng bằng ba.